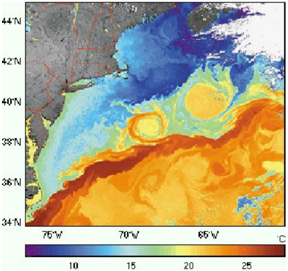
Mecanique statistique d'écoulements océaniques

Antoine Venaille , Freddy Bouchet, Eric Simonnet, Joel Sommeria

26 juin 2008

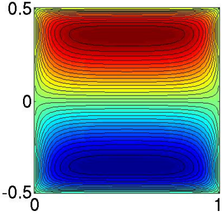
Motivation

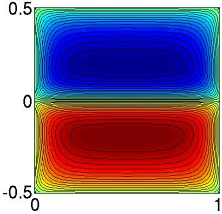


Organisation des écoulements océaniques en structures cohérentes à grande échelle

But

Est-il possible d'observer des états d'équilibre de modèles rudimentaires d'océans qui présentent un courant fort dirigé vers l'est et localisé au centre du domaine ?



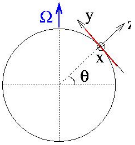


Plan

1. MOTIVATIONS
2. MODELE QUASI-GEOSTROPHIQUE A UNE COUCHE
3. CALCUL DES ETATS PREDITS PAR LA MECANIQUE STATISTIQUE
4. STABILITÉ LINEAIRE D'UN JET DIRIGE VERS L'EST DANS UN CANAL
5. CONCLUSION & PERSPECTIVES
6. (ANALOGIE AVEC MELANGE EN FLUIDE STRATIFIE)

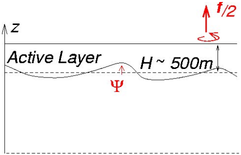
Modèle quasi-geostrophique

1) Approximation de plan beta

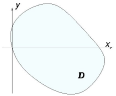


with $f = 2\Omega \sin\theta + by$

2) Idéalisation de la stratification



3) Idéalisation de la géométrie



4) Forte rotation

$$Ro = \frac{\text{Inertia}}{\text{Coriolis}} = \frac{U}{fL} \ll 1$$

5) On cherche des solutions **inertielles**, en supposant Forçage+Dissipation=0

Limites

- Le terme de forçage par le vent présent dans les modèles classiques de circulation océanique est négligé.
- On néglige les effets 3D.
  - on néglige les transferts d'énergie vers les modes baroclines.
  - on ne considère pas le forçage en densité (circulation thermohaline).

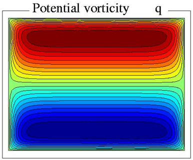
Modèle quasi-géostrophique

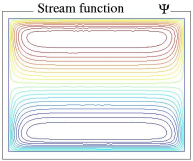
$$\partial_t q + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, q = 0$$

$$q = R^2 \Delta \phi - \phi + \beta y$$

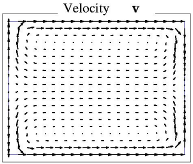
$$\mathbf{v} = R^2 \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\nabla} \phi$$

$$\phi = \phi_{fr} \quad on \quad \partial \mathcal{D}, \quad < \phi >= 0$$



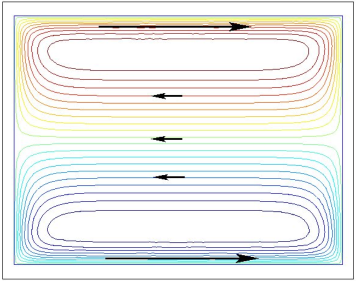


Etats stationnaires $\Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, q = 0$



$q = f(\phi) \Rightarrow$ **états stationnaires**

La solution de Fofonoff



Nicholas Fofonoff
(1929-2004)

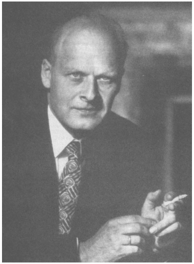
$$a\phi + c = R^2\Delta\phi - \phi + \beta y$$

$$q = a\phi + c$$

N. Fofonoff, J. Mar. Reas., 1954

Statistical mechanics of 2D flows

- *Onsager, Nuovo Cimento suppl. (1949)* for point vortices.
- *Robert, CRAS (1990)*, *Robert & Sommeria, JFM 1991*, *Miller, PRL (1990)* for the continuum Euler equation.
- See *Eyink and Sreenivasan, Rev. Mod. Phys. (2006)* for a review of the work of Onsager and its recent developments.

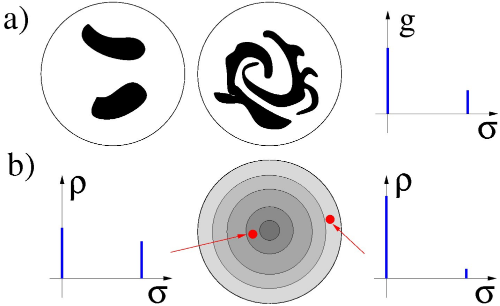


Lars Onsager
(1903-1976)

The observed flow at large scale is the most probable one : an overwhelming number of *microscopic configurations* satisfying the constraints of the problem corresponds to this *macroscopic state*.

From the initial *fine-grained vorticity* field $q(x, y)$, one get

- The energy E
- The area $g(\sigma)$ associated to each vorticity level σ



The final state is characterized by $\rho(x, y, \sigma)$, and the *coarse-grained vorticity* is $\overline{q}(x, y) = \int \sigma\rho d\sigma$.

On maximise l'entropie de mélange

$$\mathcal{S}_{BG}[q] = -\int_{\mathcal{D}} \int \rho(\mathbf{r},\sigma) \ln \rho(\mathbf{r},\sigma) d\sigma d\mathbf{r}$$

qui "compte" le nombre de micro-états associés à ρ, tout en imposant les contraintes du problème :

$$\mathcal{E}[\rho] = -\int_{\mathcal{D}} \overline{\psi}\,\overline{q} d\mathbf{r}$$

$$\mathcal{A}_{\sigma}[\rho] = \int_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{r},\sigma) d\mathbf{r} = g(\sigma)$$

On obtient un problème variationnel :

$$S_{RSM}(E,g) = \max_{\rho \,|\, \mathcal{N}[\rho]=1} \left\{ \mathcal{S}[\rho] \mid \mathcal{A}_{\sigma}[\rho] = g(\sigma) \;\&\; \mathcal{E}[\rho] = E \right\}$$

But

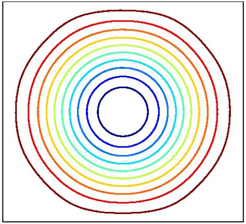
Pour une relation $q = f(\psi)$ donnée

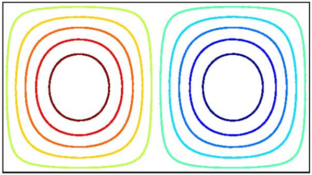
- Existe-t-il une solution stationnaire présentant un courant fort dirigé vers l'est au centre du domaine ?
- Si oui, cette solution est-elle stable ?
- Est-ce un équilibre statistique ?
- Comment évoluent les perturbations ?

Fofonoff généralisé

$$\mathbf{f(\psi) = a\psi + b}$$

Il existe des solutions stables ayant une structure très différente





Mais **pas de jet dirigé vers l'est**...

1. *Chavanis & Sommeria, JFM (1996)* calculent et classent les états d'équilibre statistiques de **l'équation d'Euler** en fonction de leur énergie et de leur circulation, pour tout domaine fermé. Observation de **transitions de phase monopole -dipole**.

2. *Bouchet Physica D 2007* Simplification du problème variationnel de la théorie RSM : toute solution de

$$\max_q \{\mathcal{S}[q] = \langle s(q)\rangle \mid \mathcal{E}[q] = E \;\&\; \mathcal{C}[q] = \Gamma\}$$

est un état d'équilibre de la théorie RSM. Ici, on prendra $s(q) = -q^2/2$. Le calcul des points critiques donne

$$\delta\mathcal{S} - \beta\delta\mathcal{E} - \gamma\delta\mathcal{C} \Leftrightarrow \mathbf{q} = \beta\psi - \gamma$$

3. *Bouchet and Barré J. Stat. Phys. 2005* Proposent une classification des transitions de phases et de l'inéquivalence d'ensemble pour les systèmes à interaction à longue portée.

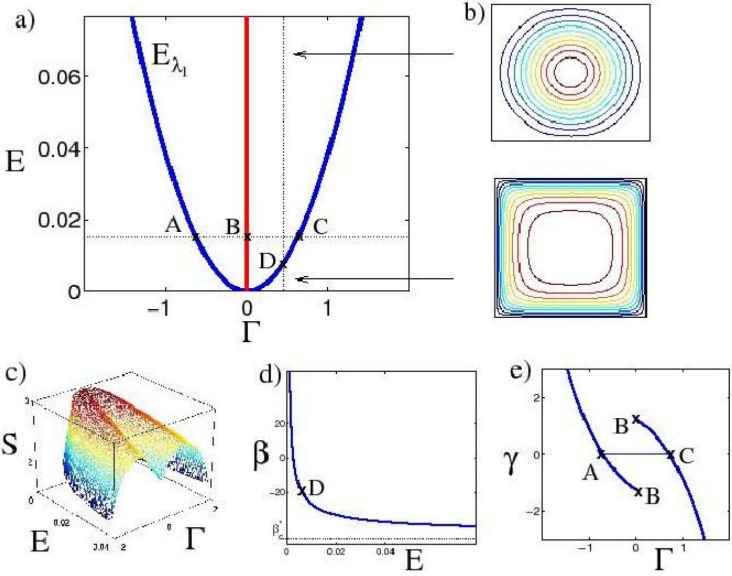
L'inéquivalence d'ensemble

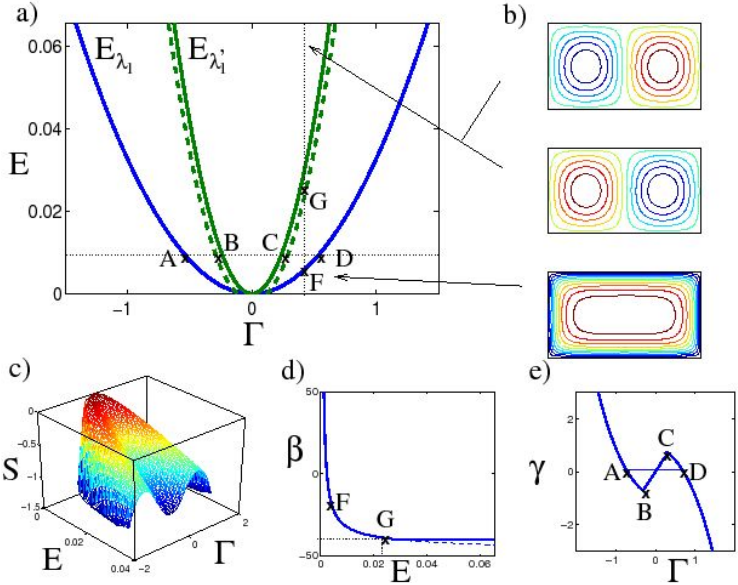
Less constrained variational problems are easier to solve.

$$
\begin{aligned}
S(E,\Gamma) &= \max_q \left\{ \mathcal{S}[q] \mid \mathcal{E}[q] = E \ \& \ \mathcal{C}[q] = \Gamma \right\} && \textbf{(microcanonical)} \\
F(\beta,\Gamma) &= \min_q \left\{ -\mathcal{S}[q] + \beta\, \mathcal{E}[q] \mid \mathcal{C}[q] = \Gamma \right\} && \textbf{(canonical)} \\
J(\beta,\gamma) &= \min_q \left\{ -\mathcal{S}[q] + \beta\, \mathcal{E}[q] + \gamma \mathcal{C}[q] \right\} && \textbf{(grand canonical)}
\end{aligned}
$$

All those variational problems have the **same critical points**.

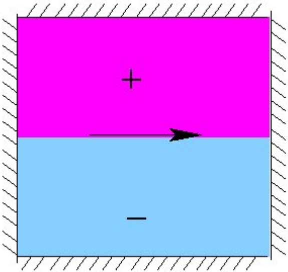
Solution in canonical ensemble $\Rightarrow$ Solution in canonical ensemble $\Rightarrow$ Solution in microcanonical ensemble

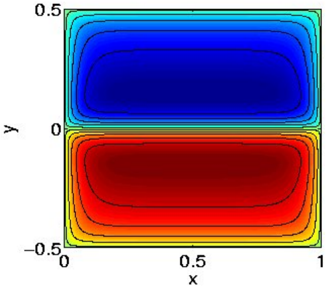

a)
E_{λ_1}
E
0.06
0.04
0.02
0
A
B
C
D
−1
0
1
Γ
b)
c)
S
E
Γ
d)
β
20
0
−20
β_c^*
0
0.02
0.04
E
e)
γ
2
0
−2
B
C
A
B
−1
0
1
Γ


a)
b)
c)
d)
e)
E
Γ
A
B
C
D
F
G
S
β
γ

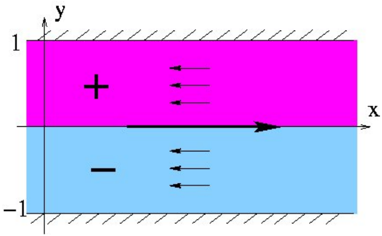
Front de vorticité potentielle (PV)

$$\mathbf{f(\psi) = 1 - 2H(\psi)}$$





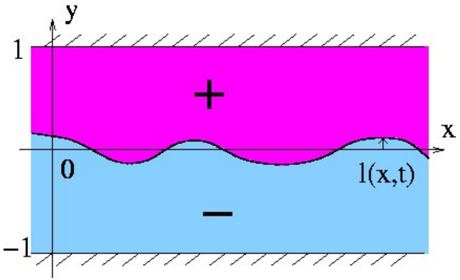
Dans un canal



Vitesse zonale : $u = -\partial_y \psi$

Stabilité ?

Perturbation du front de PV

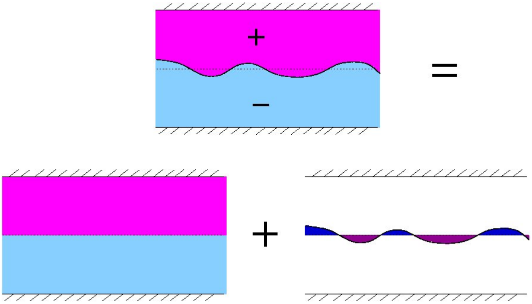


$$\partial_t l + u \partial_x l = v$$

$$u = -\partial_y \psi \quad v = \partial_x \psi$$

$$\Delta \psi - \frac{\psi}{R^2} + \beta y = q$$

Stabilité linéaire du front de PV



$$\boldsymbol{\partial_t l + u_0 \partial_x l = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x G(x, 0, x', 0) l(x') dx'}$$

$$G(x, y, x', y')$$

$$\Delta G - \frac{G}{R^2} = \delta(x - x')\delta(y - y')$$

Stabilité linéaire du front de PV

$$l = \frac{1}{2\pi}\int l_k e^{ikx}\, dk$$

Les modes de Fourier évoluent indépendamment les uns des autres

$$\mathbf{\partial_t l_k + ik\left(u_0 - \frac{\tanh\sqrt{R^{-2}+k^2}}{\sqrt{R^{-2}+k^2}}\right) l_k = 0}$$

$$u_0 = R - \beta R^2 \quad \text{pour } R \ll 1$$

$$l_k = l_k(0)\exp(-ikv^{\phi}t)$$

Dans la limite $k^2R^2 \ll 1$

$$v^{\phi} = -\beta R^2 + \frac{1}{2}R^3k^2$$

Stabilité linéaire : conclusion

Le front de PV correspond à un **courant fort dirigé vers l'est** de largeur R, le **rayon de déformation de Rossby**

Les composantes de Fourier l_k de la perturbation évoluent indépendamment les unes des autres, sous la forme d'ondes progressives de vitesse de phase v^{ϕ}

- dirigée **vers l'ouest pour** $\lambda > \sqrt{\frac{R}{2\beta}}$
- dirigée **vers l'est pour** $\lambda < \sqrt{\frac{R}{2\beta}}$
- Le cas critique correspond à une **onde stationnaire** ayant une longueur d'onde de l'ordre de l'**échelle de Rhines**.

Résumé des résultats

- Les jets dirigés vers l'est ne sont pas des états d'équilibre statistiques
- Dans le cas d'une relation $q - \psi$ linéaire, description théorique complète des écoulements et transitions de phase, pour une large classe de modèles et de paramètres. Généralisation de la solution de Fofonoff.
- Stabilité linéaire d'un jet dirigé vers l'est dans un canal, dans le cas d'un front de vorticité potentielle, descriptionde l'évolution des perturbations

perspectives

- Stabilité d'un jet vers l'est dans un domaine fermé ?
- Evolution non linéaire du front de PV
- test experimentaux de l'inéquivalence d'ensemble ?